WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

«Инь» и «ян»: рекурсия и итерация, «Ханойская башня» и «Китайские кольца»

А. К. ДЬЮДНИ

ХОРОШИЕ головоломки вводят нас в «царство абстрактной мысли, населенное математиками и другими теоретиками». Лучшие головоломки воплощают в себе интересные темы, которые, конечно, намного важнее самих головоломок.

Две классические головоломки — «Ханойская башня» и «Китайские кольца» — представляют две пары взаимно противоположных понятий: «рекурсия» — «итерация» и «единство» — «многообразие». Если не задумываться над такими серьезными проблемами, то головоломки — хорошее развлечение. И хотя подчас они обескураживают новичка, каждый испытывает волнующее чувство удовлетворения, все глубже погружаясь в царство абстрактной мысли.

Задача «Ханойская башня» заключается в перемещении дисков, нанизанных на вертикальный стержень, с помощью двух других стержней (см. рисунок внизу). В исходном положении на один из стержней нанизано некоторое число дисков различного размера, так что наименьший диск находится сверху. Диски можно перемещать согласно следующим простым правилам:

1. Перекладывать диски со стержня на стержень можно только по одному.

2. Нельзя класть диск большего размера на диск меньшего размера.

Сначала нужно переложить наименьший диск, так как в исходном положении доступен только он. Затем для наименьшего диска возможны два перемещения (оба бессмысленные) и одно перемещение для диска следующего по величине размера. Его можно переложить на пустой стержень, потому что на диск наименьшего размера его класть нельзя (правило 2). На третьем шаге выбрать правильный вариант перемещения уже труднее: следует ли второй диск вернуть на исходный стержень или нужно снова переместить первый диск, а если так, то на какой стержень?

Начиная с этого шага, играющий при выборе каждого следующего хода имеет все большие шансы совершить ошибку. Но даже в том случае, если все перемещения будут выбраны правильно, потребуется $2^n - 1$ шага, чтобы переместить башню из n дисков по одному на каждом шаге, на другой стержень (число шагов мы вычислим ниже). Чтобы решить эту головоломку даже при сравнительно небольшом числе дисков, требуется поразительно много времени. Это прекрасно проиллюстрировано в легенде, которую мы процитируем по классической книге Болла о головоломках (W.R. Ball «Mathematical Recreations and Essays»).

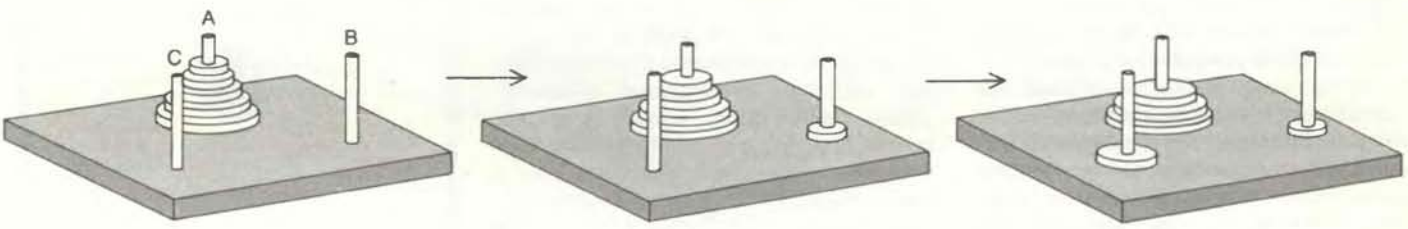
«В великом храме Бенареса... под куполом, находящимся точно в центре мира, покоится бронзовая пластина с тремя алмазными стержнями, каждый длиной в один локоть и толщиной как тело пчелы. На один из этих стержней бог при сотворении мира положил шестьдесят четыре диска из чистого золота, так что наибольший диск лежит на бронзовой пластине, а остальные образуют пирамиду, самый маленький диск находится на вершине пирамиды. Это башня Брамы. Работая день и ночь, жрецы переносят диски с одного стержня на другой, следуя мудрым и незыблемым законам Брамы, согласно которым диски можно перекладывать только по одному и каждый диск можно класть на стержень только в том случае, если под ним не окажется диск меньшего размера. Когда все шестьдесят четыре диска будут таким образом перенесены, и башня, и храмы, и жрецы-брамины превратятся в прах, и наступит конец света».

То, что мир до сих пор не исчез, свидетельствует о чрезвычайно большом времени, требующемся для решения задачи: даже если жрецы будут перекладывать по одному диску в секунду, то потребуется более 500 млрд. лет, чтобы переместить всю башню из 64 дисков!

А теперь (без всякого риска для Вселенной) читатель может ближе познакомиться с этой задачей, взяв пять игральных карт, например последовательно от туза до пятерки пик, и условно выделив три места на столе, куда можно было бы класть карты. Сложите эти карты колодой в одном из трех мест по порядку, так чтобы туз находился сверху. Попытайтесь решить головоломку о башне с пятью дисками, перемещая карты по одной с места на место, но так, чтобы ни одна карта не легла на карту меньшего достоинства (в данном случае считается, что двойка «старше» туза). Сможете ли вы полностью переместить башню из пяти карт прежде, чем наступит «конец света»? Согласно формуле $2^5 - 1$, это можно сделать за 31 шаг (перемещение).

Как следует приступать к решению подобных задач? Почему некоторые люди, казалось бы, с легкостью решают головоломки, в то время как другим решение дается с трудом? В моем ответе на второй вопрос содержится и ответ на первый: я убежден, что каждый из нас пользуется математическим мышлением почти в любой момент своего сознательного существования. Как наши умозаключения относительно того, почему дядюшка Гарри не присутствовал на свадьбе, так и план размещения тюков и чемоданов в багажнике машины являются результатами логического вывода из определенных предпосылок. Процесс такого вывода может оказаться весьма изощренным, а это дает мне основания полагать, что почти каждый человек, способный проявлять такие интуитивные способности, может стать хорошим аналитиком. Задача заключается в том, чтобы довести интуитивные аналитические способности до сознательного уровня.

Например, после того как человек «поиграл» некоторое время в задачу о башне из пяти дисков, он почти наверняка заметит, что время от времени возникает задача о башне с меньшим числом дисков. Довольно часто башня состоит из двух дисков, а иногда — из трех или даже четырех. Такие ситуации возникают сами собой, даже если чело-



Первые два шага в решении головоломки «Ханойская башня»

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

век не имеет четкого плана действий, а просто играет с пирамидками.

Однако вскоре у играющего возникает ключевая идея: «Если можно построить пирамиду из двух или трех дисков (не говоря уже о пирамиде из четырех дисков), то почему бы не сделать пирамиду из пяти дисков?» Заметив определенные закономерности в процессе построения пирамидок меньшего размера, играющий рано или поздно приходит к той последовательности шагов, которая приводит к перемещению всей башни из пяти дисков на один из свободных стержней.

Аналогичная идея воплощается в математике и программировании в виде одного из распространенных методов решения задач. Если попытаться сформулировать принцип, лежащий в основе этого метода, то получится что-нибудь вроде: «Если можно решить задачу несколько меньшего размера, чем та, которую требуется решить, то, может быть, удастся воспользоваться решением, полученным для меньшей задачи, чтобы решить бóльшую». Таким образом, мы приходим к понятию рекурсии — вложение в процедуру решения той же самой процедуры.

Идею рекурсии в применении к головоломке о башне сформулировать нетрудно. Если можно решить задачу для $n - 1$ дисков, то несомненно можно решить ее и для n дисков. Ключ к построению решения задачи для n дисков на основании решения для $n - 1$ дисков лежит в решении задачи для двух дисков. Предположим, что требуется переместить два диска, верхний (первый) и нижний (второй) на другой стержень. Назовем стержень, на котором они находятся, исходным, стержень, на который их нужно переместить — конечным, а остающийся стержень — вспомогательным. Если переложить первый диск на вспомогательный стержень, а второй — на конечный, то на третьем шаге остается положить первый диск на конечный стержень поверх второго, завершив тем самым решение задачи. Рассмотренные три шага составляют основу трех стадий рекурсивного решения задачи, в котором первый диск мысленно заменяется башней, состоящей из $n - 1$ дисков, а второй диск — нижним, наибольшим, n-м диском. Три стадии процесса решения можно представить следующим образом:

1. Перенести башню из $n - 1$ дисков с исходного стержня на вспомогательный.

2. Переложить n-й диск с исходного стержня на конечный.

3. Снова перенести башню из $n - 1$ дисков — на этот раз со вспомогательного стержня на конечный.

Описанная процедура из трех стадий аналогична решению, полученному нами для задачи с двумя дисками. Предположив, конечно, что мы можем решить задачу для $n - 1$ дисков, можно воспользоваться последовательностью шагов для того, чтобы перенести башню из $n - 1$ дисков с исходного стержня на вспомогательный. На следующей стадии n-й диск, освобожденный от лежавших на нем меньших дисков, перекладывается на конечный стержень. На третьей стадии можно снова воспользоваться решением задачи для $n - 1$ дисков, чтобы переместить их со вспомогательного стержня на конечный.

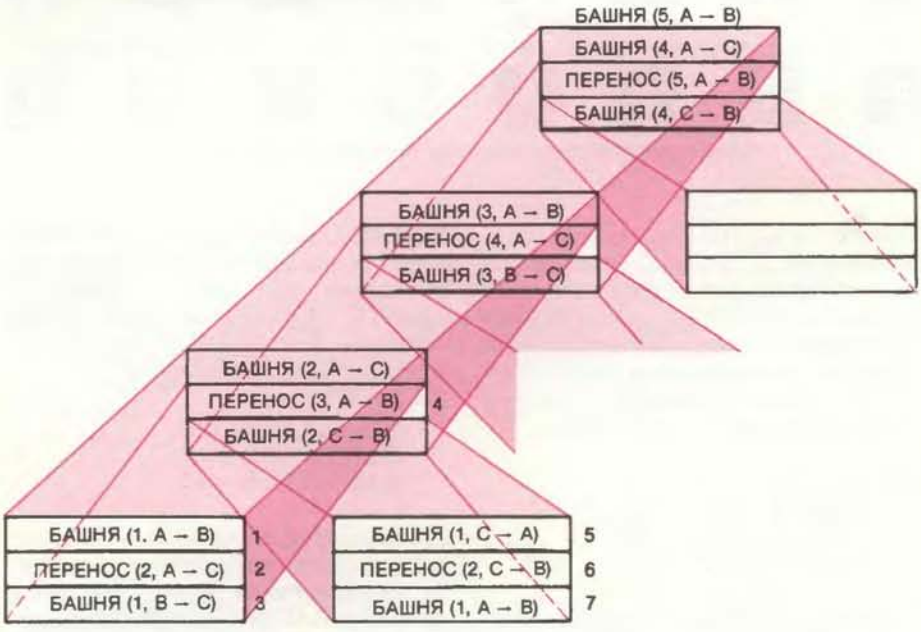
Как решить задачу о башне, состоящей из $n - 1$ дисков? Ответ очевиден: следует повторить ту же процедуру, но заменить параметр $n - 1$ в стадиях 1 и 3 на $n - 2$, и т.д. В конце концов мы придем к процедуре, в которой на стадиях 1 и 3 нужно переместить только один диск.

Рассмотренный процесс решения с многочисленными «ветвями» и «подветвями» для человека кажется очень запутанным, однако теперь нам становится ясно, почему для решения такой задачи требуется почти 2^n шага: при каждом использовании процедуры она дважды повторяет сама себя. И если человеку трудно себе представить, как можно реализовать подобную процедуру решения, для компьютера это не вызывает никаких затруднений.

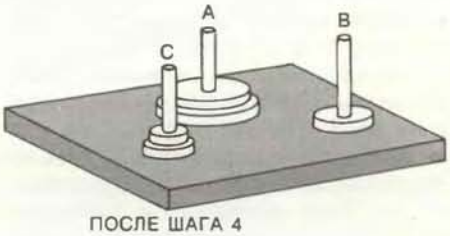
Рисунок внизу показывает часть решения задачи с пятью дисками. Три стадии, рассмотренные нами выше, представлены как процедуры, встроенные в бóльшую процедуру с именем БАШНЯ (n, $X \rightarrow Y$). В этой процедуре используются три элемента данных: n — число дисков, которые нужно переместить, X — исходный стержень и Y — конечный стержень.

Согласно введенной нами терминологии, схему рекурсивной программы для задачи о башне можно записать алгоритмически в следующем виде:

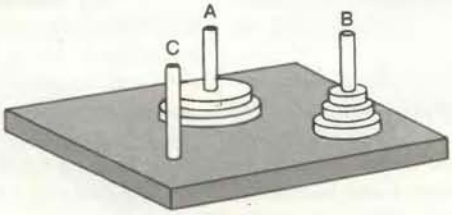
БАШНЯ (*n, исходный → конечный*):
БАШНЯ
(*n* − 1,*исходный → вспомогательный*)
ПЕРЕНОС
(*n, исходный → конечный*)
БАШНЯ
(*n* − 1, *вспомогательный → конечный*)



ПОСЛЕ ШАГА 3



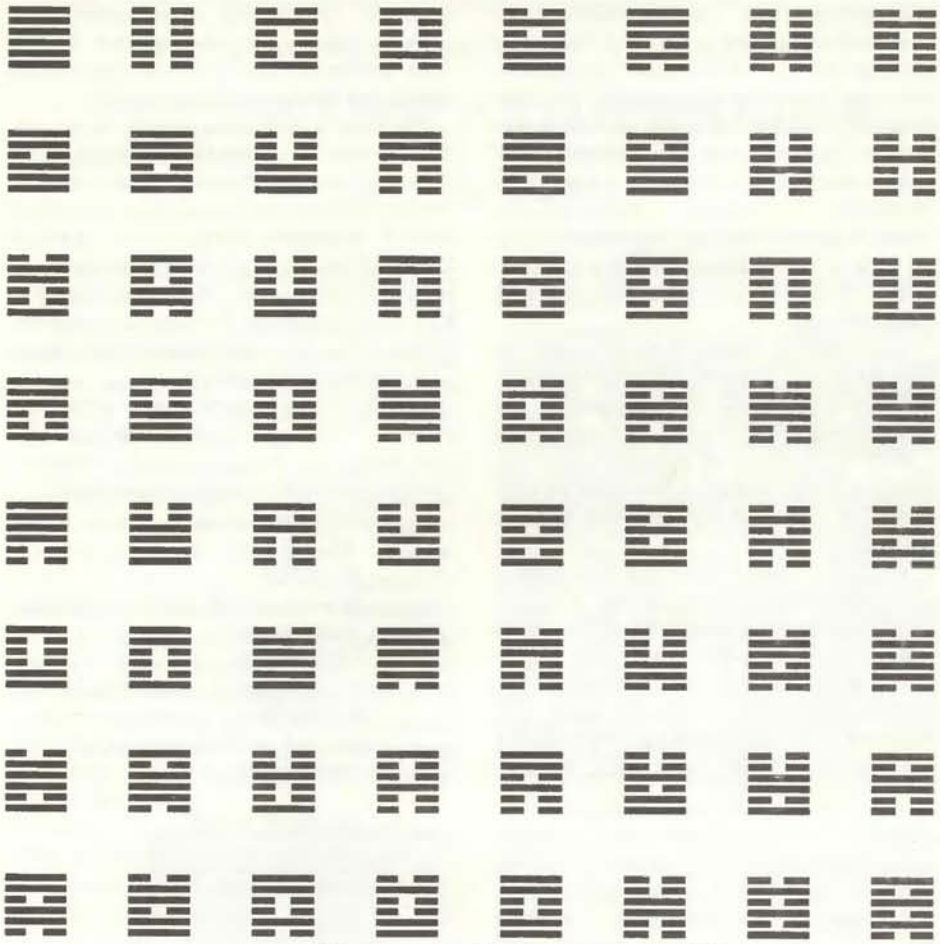
ПОСЛЕ ШАГА 4



ПОСЛЕ ШАГА 7

Рекурсивное решение головоломки «Ханойская башня»

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NARODU.RU



Расположение 64 гексаграмм Ван Вена из книги «I Ching»

Предположим, что нужно переместить пять дисков со стержня A (исходный) на стержень B (конечный). Если вместо n подставить число 5, а вместо слов «исходный», «конечный» и «вспомогательный» соответственно буквы A, B и C, то рассматриваемую процедуру можно переписать в таком виде:

БАШНЯ (5, $A \rightarrow B$):
БАШНЯ (4, $A \rightarrow C$)
ПЕРЕНОС (5, $A \rightarrow B$)
БАШНЯ (4, $C \rightarrow B$)

Другими словами, программа должна сначала справиться с задачей перемещения первых четырех дисков со стержня A на стержень C. Далее, согласно нашей алгоритмической записи, когда эта процедура завершена, нужно выполнить ПЕРЕНОС (5, $A \rightarrow B$), т.е. перенести пятый, наибольший диск со стержня A на стержень B. Затем следует еще одно обращение к процедуре БАШНЯ для того, чтобы переместить первые четыре диска со стержня C на стержень B.

Каждое обращение к процедуре БАШНЯ влечет за собой еще три обращения к процедурам: БАШНЯ, затем *ПЕРЕНОС* и снова *БАШНЯ*. Процедура ПЕРЕНОС не может быть выполнена, пока не завершена первая процедура БАШНЯ. Это означает, что порядок действий, выполняемых компьютером, следующий: сначала четыре раза подряд выполняется процедура БАШНЯ; при этом мы перемещаемся вниз влево по диаграмме, пока не приходим к последовательности

БАШНЯ (1, $A \rightarrow B$)
ПЕРЕНОС (2, $A \rightarrow C$)
БАШНЯ (1, $B \rightarrow C$)

Реальная программа должна будет содержать одну дополнительную команду. Когда остается только один диск в процедуре БАШНЯ, он переносится непосредственно со стержня на стержень без использования рекурсии. Первый диск переносится со стержня A на стержень B. Затем с помощью процедуры ПЕРЕНОС второй диск перемещается со стержня A на стержень C. Наконец, компьютер снова «переносит» первый диск, на этот раз со стержня B на стержень C.

К этому моменту компьютер завершил также первую процедуру БАШНЯ во второй снизу табличке рисунка на с. 91 и выполняет ПЕРЕНОС (3, $A \rightarrow B$), непосредственно перемещая третий диск со стержня A на стержень B. Затем команда *БАШНЯ* (2, $C \rightarrow B$) разворачивается в три шага (нижняя табличка на рисунке).

Выполненные таким образом семь шагов завершают выполнение первой процедуры БАШНЯ на втором уровне диаграммы, и компьютер продолжает действовать в той же манере, то опускаясь к табличкам нижних уровней, то возвращаясь на более высокий уровень. В конце концов программа проходит по всей диаграмме и задача оказывается решенной.

Эффект рекурсии воспринимается иногда как некое волшебство, потому что все многочисленные записи для запоминания, «где мы находимся», делаются компьютером — человеку трудно запомнить такой большой объем информации. Однако существует другой метод решения. Четыре года назад П. Бьюнеману из Университета шт. Пенсильвания и Л. Леви из AT&T Bell Laboratories удалось найти простую последовательность перемещений, позволяющих решить задачу о башне. Бьюнеман и Леви предложили воспользоваться простым чередованием перемещений двух видов:

1. Перенести наименьший диск с того стержня, на котором он находится в данный момент, на стержень, следующий в порядке движения часовой стрелки.

2. Перенести любой диск, кроме наименьшего.

Шаг 2 вовсе не такой произвольный, как может показаться на первый взгляд: под действующими ограничениями всегда находится лишь одно дозволенное перемещение. Чередование этих шагов продолжается до тех пор, пока задача не окажется решенной.

Не так давно я сделал из дерева все необходимое для задачи о башне с восемью дисками и предложил одному своему знакомому «поиграть». У него ничего не получилось и он вышел из комнаты. Тем временем я быстро объяснил алгоритм решения Бьюнемана — Леви его восьмилетней дочери, которая до этого наблюдала за игрой как зачарованная. Когда мой друг вернулся, он был поражен, видя как его дочь спокойно без малейшего колебания перекладывает диски со стержня на стержень. Через несколько минут она решила задачу. «Ну и ребенок у тебя», — сказал я.

Главное преимущество метода Бьюнемана — Леви заключается в том, что он не требует рекурсии при решении задачи о башне; достаточным оказывается простое итерационное решение. В программе, построенной по итерационному принципу, повторяющиеся действия выполняются в виде обыкновенного цикла, а не за счет последовательности рекурсивных процедур. Хотя рекурсивные программы привлекают краткостью и изящной формой, они требуют большого объема памяти. На примере рассмотренной иллюстрации мы видим, что для рекурсивного решения задачи о башне необходим большой объем памяти, чтобы хранить ин-

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

формацию о всех незавершенных стадиях процедуры БАШНЯ. Итеративные программы, подобные той, которая основана на алгоритме решения Бьюнемана — Леви, почти совсем не требуют памяти. Однако заменить рекурсивную программу итерационной, подобно тому как мы сделали это в задаче о башне, удается редко.

Понятия рекурсии и итерации представляют собой одну из многих противоположностей в вычислительной математике. Это своеобразные «инь» и «ян» в подходе к процессам обработки информации с повторяющимися процедурами. «Инь» и «ян» — основные понятия древнекитайской мифологии и натурфилософии, полярные первоначала. Они лежат в основе книги «I Ching» («Книга изменений»). «Инь» и «ян» подобны двоичным знакам 0 и 1, имеющим фундаментальное значение в кодировании, принятом при вычислениях на цифровых машинах. В книге «I Ching» «инь» представляется двойной горизонтальной черточкой (— —), а «ян» — одинарной (—). Эти символы группируются в наборы по шесть, образуя 64 гексаграммы (см. рисунок на с. 92). Интерпретируемая соответствующим образом, каждая гексаграмма представляет определенный выбор. «Верующий» тянет соломинки тысячелистника, чтобы определить, какая из этих гексаграмм имеет отношение к его жизни. Показанное здесь расположение символов приписывают Ван Вэну, правившему в 1150 г. до н.э.

Говоря о двоичных цифрах, я вспомнил еще один способ решения головоломки «Ханойская башня». Если пронумеровать диски последовательно, как 1,2,3,...,*n*, начиная с наименьшего и кончая наибольшим диском, то каждый шаг в процессе решения задачи можно представить двоичным числом. Например, чтобы решить задачу с пятью дисками, составим список пятиразрядных двоичных чисел в порядке натурального ряда. Вот первые восемь пятиразрядных двоичных чисел:

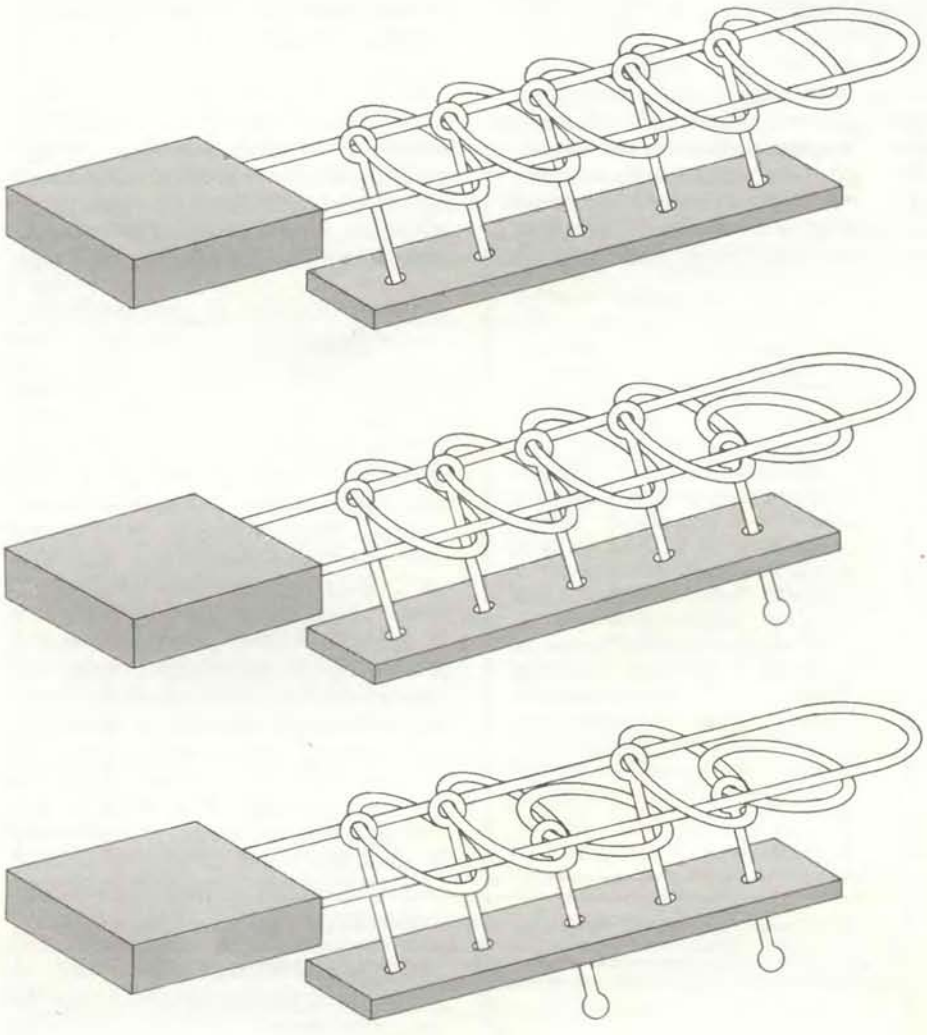
```
00000
00001  (1)
00010  (2)
00011  (1)
00100  (3)
00101  (1)
00110  (2)
00111  (1)
01000  (4)
```

В каждом двоичном числе, имеющем предшественника в последовательности, есть только один разряд, изменившийся с 0 на 1. Позиция этого разряда (считая справа налево) дана в виде десятичного числа, указанного в скобках рядом с соответствующим двоичным числом. Но эти числа являются также номерами первых семи перекладываемых дисков. Это соответствие сохраняется на протяжении всей стандартной последовательности перемещений при решении задачи. Используя только произвольное двоичное число в этой последовательности, Т. Уолш с нашего факультета в Университете пров. Западный Онтарио при помощи компьютера может восстановить ситуацию, возникающую в ходе решения задачи на соответствующей данному двоичному числу стадии. Однако разработанный им алгоритм слишком громоздкий для того, чтобы его можно было привести в настоящей статье.

Теперь познакомим читателя с головоломкой «Китайские кольца» (см. рисунок внизу). Предмет головоломки состоит из длинной проволочной петли, прикрепленной к рукоятке, и набора колец, накинутых на петлю. Каждое кольцо при помощи металлических стержней свободно связано с деревянной пластинкой, расположенной под петлей. Стержень, соединяющий кольцо с деревянной пластинкой, проходит также через кольцо, расположенное позади данного (ближе к рукоятке), препятствуя тем самым его снятию с петли.

Задача заключается в том, чтобы снять все кольца. Как и при решении задачи о башне, новичок может легко ошибиться. На рисунке показаны первые два шага на пути к решению задачи с пятью кольцами. Чтобы снять кольцо с петли, оттяните петлю назад насколько возможно, вплоть до стержня, расположенного непосредственно перед кольцом, которое вы хотите снять. Последнее можно повернуть вверх, так чтобы поднятая часть кольца перешла через дужку петли и сошла с нее. Оттянув теперь петлю вперед, кольцо можно наклонить в сторону, и оно выпадет из петли. По ходу решения головоломки часто требуется снова помещать кольца на петлю; в подобных случаях выполняется обратная процедура.

Попытки решить головоломку с китайскими кольцами связаны с той же общей проблемой, которая возникает в задаче о башне. Периодически появляются «конфигурации», в которых то или иное число колец оказывается снятым с петли, и играющий надеется, что существует какая-то аналогичная последовательность перемещений, позволяющая решить задачу полностью — снять все кольца с петли. Задача с кольцами может быть решена с помощью такого же рекурсивного алгоритма.



Первые два шага в решении головоломки «Китайские кольца»

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

Существует и простая итерационная процедура для ее решения, еще более очевидная, чем итерационное решение задачи о башне. Однако, чтобы не лишать читателя удовольствия, которое он испытает, решив задачу, мы не станем открывать секрета этого простого метода. Здесь практически невозможно дать какое-нибудь указание, не сказав ответа. Отметим лишь, что решение можно сформулировать в одном или двух предложениях, и оно не требует никакой формальной записи.

Удивительно, что эти задачи оказываются почти полностью идентичными. Это напоминает еще об одном контрасте, который часто наблюдается в математике вообще и в вычислительной математике в частности. Две задачи, внешне кажущиеся совершенно различными, при более детальном рассмотрении оказываются, по существу, одной и той же задачей!

Связь между двумя рассмотренными головоломками проявляется при анализе двух двоичных кодов и алгоритма перевода из одного кода в другой. Подобно тому как мы представляли шаги решения задачи о башне последовательными двоичными числами, введем двоичный код для представления задачи с кольцами: пусть 1 представляет кольцо, находящееся на петле, а 0 — соответственно кольцо, снятое с петли. Тогда задача с пятью кольцами может быть представлена пятиразрядной последовательностью 0 и 1, так что крайний левый разряд будет соответствовать кольцу, расположенному у рукоятки. Первые четыре конфигурации в задаче с кольцами, записанные в виде таких чисел, будут иметь следующий вид:

1 1 1 1 1 (все кольца надеты)
1 1 1 1 0 (первое кольцо снято)
1 1 0 1 0 (первое и третье кольца сняты)
1 1 0 1 1 (третье кольцо снято)

На следующих двух шагах снимается второе, а затем первое кольцо. После этого снимается пятое кольцо. Затем первые три кольца снова одеваются на петлю, чтобы можно было снять четвертое кольцо. Чтобы удалить все пять колец, требуется 21 шаг. Последние четыре конфигурации в последовательности, ведущей к решению, таковы:

0 0 0 1 0 (второе кольцо надето)
0 0 0 1 1 (первое и второе кольца надеты)
0 0 0 0 1 (первое кольцо надето)
0 0 0 0 0 (ни одно кольцо не надето)

Возможно, читателям будет интересно восполнить 14 недостающих кодов, решая задачу с кольцами в этой форме и следуя двум простым правилам (касающимся ограничений, связанных с расположением соседних колец):

1. Крайний правый разряд можно изменить (с 0 на 1 или с 1 на 0) в любой момент.

2. Из остальных разрядов можно изменять лишь тот, который находится непосредственно слева от крайнего справа разряда, имеющего значение 1.

На первый взгляд, кажется, что нет никакой связи между последовательностью из 21 двоичного кода, только что нами рассмотренной, и последовательностью двоичных чисел натурального ряда, возникающих при решении задачи о башне. На самом деле такая связь существует. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим так называемый код Грэя. Инженер Ф. Грэй, работавший в 30-х годах в фирме AT&T Bell Laboratories, разработал его для исправления ошибок, возникающих при передаче информации электронными средствами. На рисунке внизу) приведены первые 22 двоичных числа натурального ряда и соответствующие коды Грэя.

При внимательном рассмотрении чисел, представленных в коде Грэя, можно заметить интересное совпадение. Коды Грэя, взятые в обратном порядке, совпадают с последовательностью конфигураций, ведущей к решению задачи «Китайские кольца»!

Таким образом, мы получили последовательность из 21 конфигурации для решения задачи с пятью кольцами, но для решения головоломки о башне с пятью дисками требуется 31 шаг. Можно предположить, что если эти задачи в каком-то смысле идентичны, то для их решения необходимо одно и то же число шагов. Несоответствие можно устранить, рассмотрев числа в коде Грэя, бóльшие 21. Каждое из этих чисел представляет определенную конфигурацию в задаче с пятью кольцами, а последний код (соответствующий двоичному числу 11111), равный 10 000, представляет конфигурацию, в которой только одно последнее кольцо находится на петле. Это означает, что самое трудное исходное положение в задаче с кольцами такое, когда все кольца, кроме одного, ближайшего к рукоятке, сняты. При таком исходном положении число ходов, требующихся для решения задачи с n кольцами, равно $2^n - 1$ (точно тому же числу, что и для задачи с n дисками).

Очень интересную книгу, посвященную китайским кольцам, написал недавно С. Африа, профессор экономических и математических наук Университета г. Оттавы; она называется «Кольцо связанных колец» («The Ring of Linked Rings»). Именно ему принадлежит идея о связи между головоломкой «Китайские кольца» и понятием дуализма, символизируемого знаками «инь» и «ян». Хотя Африа выражает сомнение в китайском происхождении головоломки с кольцами, ему не удалось отыскать каких-либо определенных исторических сведений об игре, относящихся к периоду до 1550 г. В книге Африа описан также код Гро — предшественник кода Грэя, изобретенный в XIX в. французским математиком Л. Гро, опубликовавшим трактат об этой головоломке в 1872 г. Кстати, французы называют задачу с кольцами «бездельником» (le baguenodier), а англичане — «утомительными железками» (the tiring irons).

Существует много других аспектов этих головоломок. Например, Л. Дики с математического факультета Универ-

	ДВОИЧНЫЙ КОД	КОД ГРЕЯ		ДВОИЧНЫЙ КОД	КОД ГРЕЯ
0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	11	0 1 0 1 1	0 1 1 1 0
1	0 0 0 0 1	0 0 0 0 1	12	0 1 1 0 0	0 1 0 1 0
2	0 0 0 1 0	0 0 0 1 1	13	0 1 1 0 1	0 1 0 1 1
3	0 0 0 1 1	0 0 0 1 0	14	0 1 1 1 0	0 1 0 0 1
4	0 0 1 0 0	0 0 1 1 0	15	0 1 1 1 1	0 1 0 0 0
5	0 0 1 0 1	0 0 1 1 1	16	1 0 0 0 0	1 1 0 0 0
6	0 0 1 1 0	0 0 1 0 1	17	1 0 0 0 1	1 1 0 0 1
7	0 0 1 1 1	0 0 1 0 0	18	1 0 0 1 0	1 1 0 1 1
8	0 1 0 0 0	0 1 1 0 0	19	1 0 0 1 1	1 1 0 1 0
9	0 1 0 0 1	0 1 1 0 1	20	1 0 1 0 0	1 1 1 1 0
10	0 1 0 1 0	0 1 1 1 1	21	1 0 1 0 1	1 1 1 1 1

Пятиразрядный код Грэя получается из соответствующего двоичного числа по простому правилу: если отсчитывать разряды слева, то первый разряд кода Грэя совпадает с первым разрядом двоичного кода, а далее разряд кода Грэя равен 1, если соответствующий разряд двоичного кода отличается от предыдущего разряда; в противном случае разряд кода Грэя равен 0.

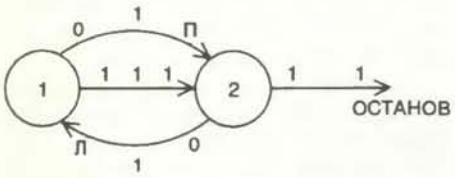
Коды Грэя для первых 22 двоичных чисел

WWW.SCIAM-MAGAZINE.NAROD.RU

ситета Ватерлоо в Онтарио напомнил мне, что решение головоломки «Китайские кольца» эквивалентно также «прохождению» по ребрам n-мерного гиперкуба.

Выше мы установили, что задачу о башне с n дисками можно решить за $2^n - 1$ шага, если пользоваться при этом тремя стержнями. Интересно заметить, что число шагов значительно уменьшается при использовании большего числа стержней — оно равно $2n - 1$ для $n + 1$ стержней. А какая картина наблюдается в интервале от 3 до $n + 1$ стержней? По какому закону меняется минимальное число шагов для решения в зависимости от числа используемых стержней? Было бы интересно заняться этим вопросом в одной из последующих статей. В то время как я пишу эти строки, энтузиасты размышляют над задачей с четырьмя стержнями, а также над головоломкой, которую Мартин Гарднер называет «дьявольской версией башни» (или японской головоломкой).

ТРИ головоломки о бобре-работяге, описанные в августовском номере журнала*, были решены М. Мэйни из г. Палатин (шт. Иллинойс). Его бобр-работяга с двумя состояниями показан ниже. Начиная с чистой ленты, он записывает 4 единицы, а затем останавливается.



Решение Мэйни лучше описать на словах. Машина Тьюринга, стирающая единственную единицу, записанную на чистой ленте, пользуется двумя единицами в качестве маркеров. На каждой стадии она проходит ленту от одной единицы к другой и проверяет ячейки, находящиеся непосредственно за ними. Если там находится единица, которую требуется стереть, то машина стирает все 3 единицы и останавливается. Если единицы там нет, машина передвигает маркер на одну ячейку дальше и возвращается к другому маркеру. Машина, стирающая много единиц, работает по тому же принципу, но никогда не может остановиться. Да и как она может остановиться, если в какой-нибудь не исследованной области ленты окажется еще одна единица? Бобры-работяги были построены П. Марино из г. Трой (шт. Нью-Йорк) и Д. Капланом из г. Дир-Парк (шт. Нью-Йорк). Марино решил также задачу очистки ленты, описав свои передвигающиеся единицы как «веники», подметающие ленту.

Р. Робинсон из Калифорнийского университета в Беркли написал для своего персонального компьютера фирмы IBM программу, моделирующую машину Тьюринга. Наблюдая, как предложенный У. Шультом бобр-работяга записывал свою 501-ю единицу, Робинсон заметил, что, прежде чем остановиться, программа порождала повторяющуюся и все время удлиняющуюся последовательность чередующихся 0 и 1. Начиная с чистой ленты, программа порождала такие последовательности длиной 0, 6, 13, 28, 48, 78, 121, 190, 289, 442 и 667 символов. В последней последовательности насчитывалась 501 единица. Робинсон решил исследовать поведение машины Шульта, когда она начинает работать не с чистой ленты, а с одной из последовательностей чередующихся 0 и 1. Начав с последовательности длиной 9 символов (из которых 5 символов — единицы), машина остановилась после 12 870 233 шагов, породив последовательность, содержащую 4911 единиц. Для этого объем памяти должен быть в 3 раза больше и необходимо в 25 раз больше шагов, чем в том случае, когда машина Шульта начинает с чистой ленты. Робинсона смутил тот факт, что сравнительно небольшое изменение во входных данных приводит к такому странному поведению машины. «Мне кажется, — пишет Робинсон, — что эти результаты заставляют сомневаться в справедливости ограничений Шульта на объем памяти и время».

По-видимому, Б. Вайман из Боннского университета не был первооткрывателем бобра-работяги с четырьмя состояниями. А. Брэйди из Университета шт. Невада в Рено построил свою версию автомата за 10 лет до Ваймана. В то время Брэйди был сотрудником Университета шт. Орегон. Интересно, что университетский значок-талисман — это бобр, а работал Брэйди на ЭВМ в Бевертоне (Beaverton, т.е. «Бобрград»). Брэйди разделяет скептицизм Робинсона. «По опыту решения задачи с четырьмя состояниями я знаю, что задача с пятью состояниями еще далека от решения. Дело заключается в том, чтобы решить, остановится или нет та или иная «далеко убежавшая» машина... По мере того как машины будут становиться сложнее, решить этот вопрос будет труднее. В конечном итоге будут затронуты очень глубокие и нерешенные математические проблемы... Проблемы, связанные с остановом каждой индивидуальной машины на чистой ленте, начиная с какого-то момента, перерастают, по существу, в отдельные математические теоремы.»

* См. «В мире науки», 1984, № 10, с. 98 — *Прим. ред.*

Издательство
МИР
предлагает:

Р. Девис, Д. Ботстайн, Дж. Рот
МЕТОДЫ ГЕНЕТИЧЕСКОЙ ИНЖЕНЕРИИ. ГЕНЕТИКА БАКТЕРИЙ
Т. Маниатис, Э. Фрич, Дж. Сэмбрук
МЕТОДЫ ГЕНЕТИЧЕСКОЙ ИНЖЕНЕРИИ. МОЛЕКУЛЯРНОЕ КЛОНИРОВАНИЕ

В последние годы методы генетической инженерии, открывающие реальные перспективы для направленной перестройки наследственности у животных и растений, находят все большее применение в биотехнологии, медицине, сельском хозяйстве и исследованиях структуры и функций генов.

Обе книги выпущены американским издательством «Коулд Спринг Харбор Лэборетори» и очень удачно дополняют друг друга. Методы, изложенные в них, отработаны в одном из наиболее известных научных центров США — лаборатории в Коулд Спринг Харбор, которую возглавляет лауреат Нобелевской премии Дж. Уотсон. В первой книге доступно, но на высоком научном уровне изложены основные методы молекулярно-генетического анализа и генетической инженерии бактерий (манипуляции с транспозонами, выделение фаговых, плазмидных и бактериальных ДНК, другие методы). Во второй книге подробно рассматриваются методы получения и культивирования некоторых штаммов бактерий и вирусов, выделение, очистка и анализ информационной РНК, синтез и клонирование ДНК, введение плазмидной ДНК и ДНК бактериофага лямбда в *E. coli*, анализ рекомбинантных клонов ДНК.

1984, 10 л. Цена 1 р. 25 к.
1984, 32 л. Цена 4 р. 80 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР